

## Волны электрострикции и анизотропная неустойчивость жидких диэлектриков в неоднородном электрическом поле

*А.Л. Куперитох, Д.А. Медведев*

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН  
проспект Лаврентьева 15, 630090 Новосибирск  
тел. +7(383)333-32-49, e-mail: [skn@hydro.nsc.ru](mailto:skn@hydro.nsc.ru)

Впервые соображения об электрострикционном механизме возникновения волн в жидкости, наблюдаемых непосредственно перед пробоем жидкого диэлектрика в сильных электрических полях, были высказаны в работе Ю.Н. Вершинина [1].

### Динамика диэлектриков в электрическом поле

На заряженную диэлектрическую жидкость в электрическом поле действует объемная сила, выражаемая формулой Гельмгольца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} - \frac{E^2}{8\pi} \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left[ E^2 \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \right]. \quad (1)$$

Пусть между двумя плоскими горизонтальными электродами приложено постоянное напряжение. В этом случае отлична от нуля только вертикальная проекция электрического поля  $E_z$ . Рассмотрим рост малых одномерных возмущений плотности и скорости, соответствующих расслоению вдоль электрического поля, в виде

$$\rho = \rho_0 + A_0 \exp(\gamma t) \exp(i2\pi x / \lambda), \quad u_x = C_0 \exp(\gamma t) \exp(i2\pi x / \lambda) \quad (2)$$

и для расслоения поперек электрического поля в виде

$$\rho = \rho_0 + A_0 \exp(\gamma t) \exp(i2\pi z / \lambda), \quad u_z = C_0 \exp(\gamma t) \exp(i2\pi z / \lambda). \quad (3)$$

Здесь  $\lambda$  – длина волны возмущений,  $A_0$ ,  $C_0$  – начальные амплитуды возмущений,  $\gamma$  – инкремент неустойчивости,  $\rho_0$  – средняя плотность вещества.

Объемная сила (1), действующая на идеальный диэлектрик в отсутствие свободных зарядов, в случае возмущений (2) имеет вид [2]

$$F_x = \frac{E_0^2 \rho}{8\pi} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} \right)_T \frac{\partial \rho}{\partial x} = K_x \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (4)$$

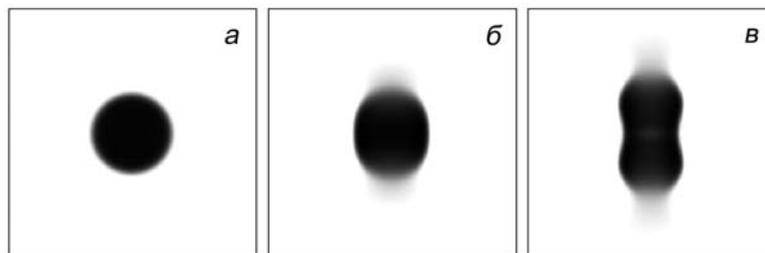
где  $E_0$  – величина однородного в этом случае электрического поля.

Для возмущений (3) величина индукции электрического поля  $D_0$  постоянна по пространству, поэтому аналогично получаем [2]

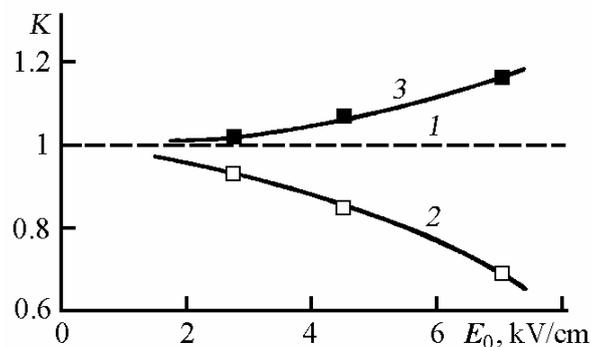
$$F_z = \frac{D_0^2 \rho}{8\pi \varepsilon^2} \left( \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} \right)_T - \frac{2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T^2 \right) \frac{\partial \rho}{\partial z} = K_z \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (5)$$

Как показано в [2], такой вид сил может приводить к анизотропному распаду диэлектрика на систему нитевидных паровых каналов в жидкости, приблизительно параллельных направлению электрического поля. Такой распад происходит даже в устойчивых однофазных начальных состояниях.

Определенный вид электрических сил (4) и (5), пропорциональных градиентам плотности, фактически означает дополнительный анизотропный вклад в поверхностное натяжение на границах раздела жидкость-пар. Это особенно наглядно видно при численной реализации метода ЛВЕ, так как электрические силы (4) и (5) включаются аддитивно с силами, обеспечивающими поверхностное натяжение [3]. Для границ ориентированных вдоль поля этот вклад положительный, а для границ, ориентированных поперек поля – отрицательный. Что интересно, при достаточно сильном поле для границ, ориентированных поперек, суммарное поверхностное натяжение может исчезнуть полностью (рис. 1). В расчетах электропроводность вещества полагалась равной нулю, а диэлектрическая проницаемость неполярного диэлектрика – зависящей от плотности как  $\varepsilon = 1 + 3\alpha\rho/(1 - \alpha\rho)$ . Величина  $\tilde{A} = E_0^2/(8\pi\rho_{cr})$  – безразмерный квадрат амплитуды электрического поля.



**Рис. 1.** Исчезновение эффективного поверхностного натяжения в сильном электрическом поле. Среднее электрическое поле соответствует  $\tilde{A} = 50$ , время  $t = 0$  (а), 100 (б), 200 (в). Приведенная температура  $\tilde{T} = 0.7$ .



**Рис. 2.** Изменение эффективного поверхностного натяжения  $K = \sigma/\sigma_0$  в электрическом поле [4]. 1 –  $\sigma = \sigma_0$ ; 2 – на полюсе пузырька; 3 – на экваторе.

В [4] на основе экспериментальных данных о деформации пузырьков в электрическом поле предпринята попытка определить изменение эффективного поверхностного натяжения жидких диэлектриков на полюсе и на экваторе, используя величину кривизны поверхности в этих точках, и считая форму пузырьков эллипсоидальной. Экспериментально найдено, что нормальная к поверхности раздела составляющая электрического поля ослабляет эффективное поверхностное натяжение, а тангенциальная составляющая усиливает (рис. 2). Однако детально механизм этого эффекта объяснен не был, так как в [4] рассматривалась только суммарная сила, действующая на элемент поверхности раздела фаз, без учета объемных сил. Эксперименты [4] были выполнены на

переменном напряжении, что сильно затрудняет интерпретацию полученных результатов, которые, таким образом, носят только качественный характер. Кроме того, полученные в [4] формулы предсказывают сплющивание пузырька электрическим полем, что прямо противоположно наблюдаемому в экспериментах эффекту удлинения пузырька вдоль поля. Причиной такого расхождения является то, что в [4] влияние электрострикционных сил было учтено только на границах пузырька.

### Действие электрострикции в неоднородном электрическом поле

Рассмотрим действие электрострикции в однородной жидкости между двумя concentрическими цилиндрическими или сферическими электродами. Пусть  $R$  и  $R_2$  – радиусы внутреннего и внешнего электродов. После подачи напряжения возникает объемная сила в направлении увеличения поля. При этом вблизи внутреннего электрода возникает область увеличенной плотности в волне торможения, а у внешнего электрода – область разрежения [5,6]. В случае, когда значение индукции электрического поля на внутреннем электроде постоянно и равно  $D_0$ , электрическое поле  $E$  изменяется с радиусом:

<b>Цилиндрические электроды</b>	$E = D_0 R / (\epsilon r),$	<b>(6.a)</b>
<b>Сферические электроды</b>	$E = D_0 R^2 / (\epsilon r^2).$	<b>(6.b)</b>

Для расчета течения жидкого диэлектрика под действием электрострикционных сил [7] использовался метод возмущений,

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho, \quad u = u_0 + \Delta u. \quad (7)$$

Будем считать, что в области  $R + c_0 t < r < R_2 - c_0 t$ , где влияния электродов на течение жидкости нет, в первом приближении плотность жидкости постоянна  $\rho = \rho_0$ , а скорость  $u = u_0 = 0$ . Здесь  $c_0$  – скорость звука.

Так как при постоянной плотности диэлектрическая проницаемость тоже постоянна, то из (1) получаем, что объемная сила равна

$$F = \frac{\rho_0 (\partial \epsilon / \partial \rho)_T}{8\pi} \nabla E^2. \quad (8)$$

В общем случае одномерное уравнение импульса для невязкой жидкости (уравнение Эйлера) имеет вид

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = F. \quad (9)$$

Так как в первом приближении плотность постоянна, то давление не зависит от координаты, и градиент давления равен нулю. Во втором приближении ( $\rho \approx \rho_0$ ,

$u \approx \Delta u$ ) уравнение импульса записывается в виде  $\rho_0 \frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} = F$ . Так как сила не

зависит явно от времени, то это уравнение можно проинтегрировать по времени

$$\rho_0 \Delta u = Ft. \quad (10)$$

Отсюда, учитывая (6) и (8), получаем выражения для скорости [7]:

<b>Цилиндрические электроды</b>	$u = -\frac{(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T}{4\pi} \frac{D_0^2 R^2}{\varepsilon^2 r^3} t, \quad (11.a)$
<b>Сферические электроды</b>	$u = -\frac{(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T}{2\pi} \frac{D_0^2 R^4}{\varepsilon^2 r^5} t. \quad (11.b)$

Теперь можно найти поправку к плотности  $\Delta\rho$ . Для этого рассмотрим уравнение неразрывности для одномерного случая

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial r} + \frac{(D-1)\rho u}{r} = 0. \quad (12)$$

В этом уравнении  $D = 1, 2, 3$  означают плоский, цилиндрический и сферический случаи, соответственно. Отсюда, учитывая (7) и (10), получаем:

$$\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{(D-1)F}{r}\right)t. \quad (13)$$

Интегрируя еще раз по времени и подставляя сюда формулу для силы (8) с учетом (6), окончательно получаем уравнения для плотности в виде [7]:

<b>Цилиндрические электроды</b>	$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{D_0^2 R^2}{4\pi\varepsilon^2 r^4} \left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T t^2 \right), \quad (14.a)$
<b>Сферические электроды</b>	$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{3D_0^2 R^4}{4\pi\varepsilon^2 r^6} \left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T t^2 \right). \quad (14.b)$

Полученные приближенные решения справедливы для малых времен, пока  $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$ , т. е. при условии  $Ft^2/(\rho_0 r) = ut/r \ll 1$ .

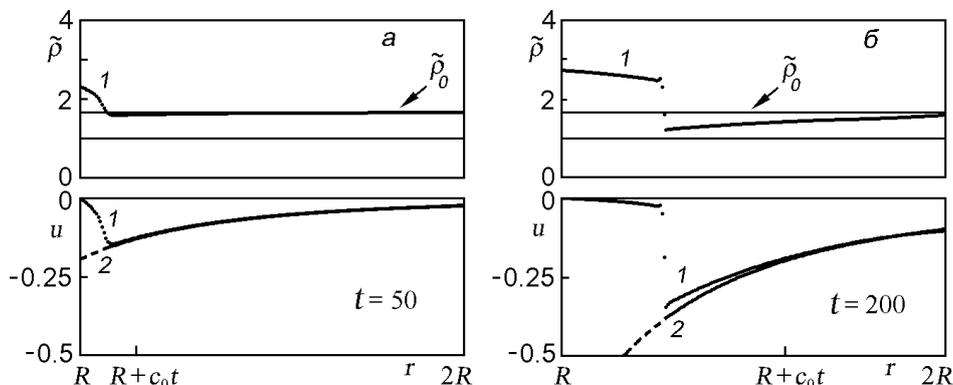
Похожие результаты получены в [5,6] в приближении линейной акустики и гораздо более сложным методом, используя преобразование Лапласа.

На рис. 3 приведены результаты, полученные методом ЛВЕ при расчете одномерного течения, соответствующего (11.a), в электрическом поле между коаксиальными цилиндрическими электродами [7]. Величина электрического поля на поверхности внутреннего электрода соответствовала значению параметра  $\tilde{A} = 208.1$ . Граничные условия для плотности и скорости при  $r = 2R$  задавались в виде условий непрерывности течения вдоль радиуса.

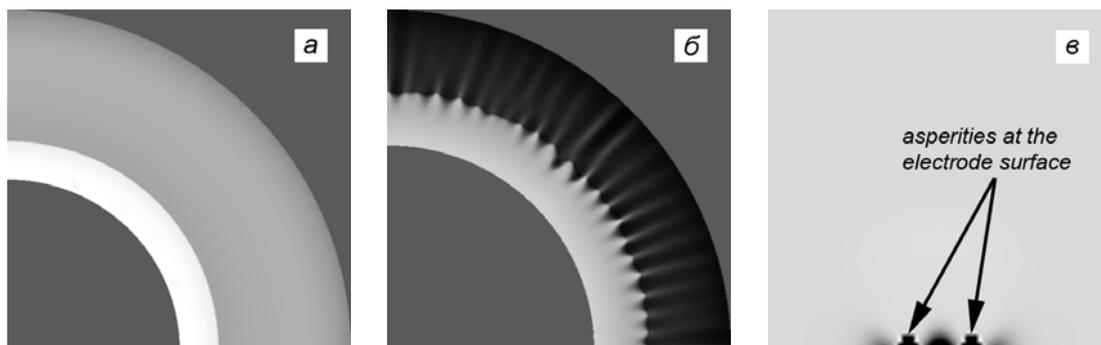
На начальной стадии, пока плотность в области вне влияния центрального электрода не сильно отличается от первоначальной, результаты расчетов хорошо совпадают с теоретическими (11.a). Область влияния внутреннего электро-

да, которую можно оценить как  $R + \int_0^t (c_0 - u_{\min}) dt$ , заметно меньше, чем величина  $r < R + c_0 t$ , полученная в [5,6] для волн электрострикции в акустическом

приближении (рис. 3). Более того, по истечении некоторого времени наблюдается формирование ударной волны, распространяющейся от электрода против потока жидкости, двигающейся перед фронтом волны со скоростью пропорциональной  $t/r_{УВ}^3$  (11.а) в направлении внутреннего электрода (рис. 3,б), где  $r_{УВ}$  – координата фронта ударной волны.



**Рис. 3.** Распределения плотности и скорости в окрестности внутреннего электрода  $R < r < 2R$ .  $t = 50$  (а), 200 (б). Кривые 1 – расчет методом ЛВЕ. Кривые 2 – теория (11.а).  $\tilde{T} = 0.9$ ,  $\tilde{\rho}_0 = 1.66$ .



**Рис. 4.** Волны электрострикции между цилиндрическими электродами (а, б):  $\tilde{A} = 300$  (а), 600 (б). Темным показана меньшая плотность (пар). Образование зародышей пробоя (с),  $\tilde{A} = 30$ . Темным показаны большие величины  $E/\rho$ .

На рис. 4,а приведены результаты моделирования течения жидкого диэлектрика между двумя коаксиальными цилиндрическими электродами. Четко видна волна сжатия, распространяющаяся от внутреннего электрода вовне.

### Неустойчивости, связанные с волнами электрострикции

В расчетах, представленных на рис. 4,б (в случае большей напряженности поля), видно развитие анизотропной неустойчивости [2] в области пониженной плотности перед волной сжатия.

Кроме того, в волне сжатия происходит образование неоднородностей из-за влияния “шероховатости” электродов. Возле выступов электрическое поле больше, поэтому диэлектрик втягивается в эти области, и от них распространяются волны разрежения. Если расстояние между выступами достаточно мало, волны разрежения встречаются примерно посередине, и в этом месте образуется область пониженной плотности. Нагляднее данный эффект показан на рис. 4,в для плоских электродов с двумя выступами на одном из них. Интересно, что

величина  $E/\rho$ , определяющая согласно закону Пашена вероятность пробоя, принимает максимальные значения не возле вершины острия, где электрическое поле максимально, а в зоне пониженной плотности между близко расположенными микроостриями на поверхности электродов. В этом месте величина  $E/\rho$  вырастает более, чем в 11 раз по сравнению с начальным значением. Такой эффект может служить новым механизмом зарождения пробоя.

Кроме описанного течения, в области перед волной уплотнения могут реализоваться условия для анизотропной неустойчивости. Плотность вещества, соответствующая локальным спинодалям при наличии электрического поля,  $\rho_{sp}$  зависит от координаты  $r$ , так как электрическое поле уменьшается с увеличением радиуса (6). При понижении плотности вещества со временем согласно (14) правая граница области, где возможна анизотропная неустойчивость ( $\rho < \rho_{sp}(r)$ ), расширяется по координате  $r$  (рис. 3,б). Результаты численного моделирования представлены на рис. 4,б. От внутреннего электрода распространяется волна сжатия (волна электрострикции), а в области перед волной плотность понижается из-за неоднородного поля скоростей (рис. 3), и там развивается анизотропная неустойчивость.

### Заключение

Проведены расчеты электрогидродинамических течений с возникновением волн электрострикции, в том числе и ударных, течений с возникновением анизотропной неустойчивости в сильных электрических полях и с изменением эффективного поверхностного натяжения на границах раздела фаз жидкость-пар. Приведенные расчеты указывают на то, что в сильных электрических полях необходимо принимать во внимание влияние электрострикции, на что впервые было обращено внимание в работах [1,5,6].

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 06-08-01006-а).

### Литература

1. Яншин Э. В., Овчинников И. Т., Вершинин Ю. Н. Механизм импульсного электрического пробоя воды // Докл. Акад. наук. 1974. Т. 214, № 6. С. 1303–1306.
2. Kupershtokh A. L., Medvedev D. A. Anisotropic instability of a dielectric liquid in a strong uniform electric field: Decay into a two-phase system of vapor filaments in a liquid // Physical Review E. 2006. V. 74, 021505(1-5).
3. Куперштох А. Л. Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана // Вестник НГУ: Серия “Математика, механика и информатика”. 2005. Т. 5, № 3. С. 29–42.
4. Смоляк Б. М. О влиянии электрического поля на поверхностное натяжение жидких диэлектриков // Теплофизические свойства жидкостей и взрывное вскипание. – Свердловск: Уральский научный центр АН СССР, 1976. С. 79–84.
5. Коробейников С. М., Яншин Э. В. Динамика электрострикционного давления у сферического электрода // ЖТФ. 1983. Т. 53, № 10. С. 2101–2104.
6. Коробейников С. М. Пузырьковая модель зажигания импульсного электрического разряда в жидкостях // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук.– Новосибирск, 1997. – 310 с.
7. Kupershtokh A. L., Medvedev D. A. Anisotropic electrohydrodynamic instability and de-

cay of dielectric liquid into two-phase system of cylindrical vapor channels in a liquid // Proc. 5th Conf. SFE, Grenoble, France. 2006, pp. 173–178.