МЕХАНИКА

Курс лекций для ФМШ

КОЛЕБАНИЯ

А. П. Ершов

17 ноября 2009 г.

Глава 7

КОЛЕБАНИЯ

Колебания – это один из самых важных разделов физики. В некотором смысле, все существующее представляет собой как раз не конструкции из «материальных точек», а именно совокупность колебаний. Хотя механические колебания, которыми мы сейчас займемся, могут показаться довольно частным случаем движения, но применяемые методы и многие эффекты те же самые в других разделах физики.

7.1 Уравнение колебаний. Частота и период, амплитуда и фаза

Простейший случай колебательной системы – масса m на пружине, имеющей коэффициент упругости k. Уравнение движения:

$$m\frac{dv}{dt} = -kx, \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -kx\,. \tag{7.1}$$

Это – **дифференциальное** уравнение. Обозначение производных по времени точками над буквой восходит к Ньютону.

Из опыта видно, что движение тела периодическое (повторяющееся). Поэтому, чтобы решить уравнение, попробуем периодическую функцию, хотя бы $x = A\cos(\omega t)$. Тогда

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t)\,, \quad \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t)\,.$$

Подставляя в (7.1), видим, что уравнение выполняется, если $\omega^2 = k/m$ при любом значении A. Величина ω называется **частотой** колебаний (иногда круговой частотой).

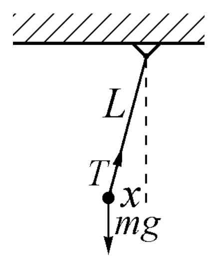

Рис. 7.1.

Другой пример – математический маятник, то есть тело на нити длины L (рис. 7.1). При отклонении на малый угол $\varphi = x/L$ натяжение $T \approx mg$, возвращающая сила $F = -T\varphi = -mgx/L$. Получаем уравнение

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{L}\cdot x\,.$$

Оно походит на уравнение для пружины с заменой k на mg/L. Подойдет такое же решение, частота $\omega = \sqrt{g/L}$. Вообще уравнение вида

$$\mu\ddot{x} = -\xi \cdot x$$

с постоянными ξ и μ или эквивалентное ему

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \, , \tag{7.2}$$

где $\omega^2 = \xi/\mu$, называется **уравнением колебаний**. Если удалось получить уравнение колебаний, значит, уже найдена частота.

Не обязательно удобна линейная координата x. Для физического маятника (рис. 7.2) с моментом инерции I относительно точки подвеса и с центром масс на расстоянии L от этой точки

$$I\varepsilon = I\ddot{\varphi} = -mgL \cdot \varphi \, ,$$

и частота $\omega = \sqrt{mgL/I}$. **Период колебаний** T находится из условия $\omega T = 2\pi$, $T = 2\pi/\omega$. Иногда частотой (но не круговой) называют $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ (число колебаний в секунду).

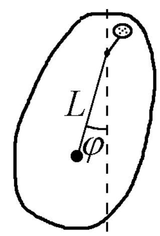

Рис. 7.2.

С тем же успехом к уравнению (7.2) подойдет решение $B\sin(\omega t)$, а также любая сумма $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Постоянные A и B определяются начальными условиями (например, координатой и скоростью массы m). При $t = 0$ $x(0) = A$, скорость $\dot{x}(0) = -B\omega$. Если оттянуть пружину и в момент $t = 0$ отпустить груз, будет чистый косинус, а при коротком толчке из положения равновесия – чистый синус. Возможна другая запись: $x = H\cos(\omega t - \varphi)$. При этом H называют **амплитудой**, φ – **фазой** колебаний. Перевод в первую форму:

$$H\cos(\omega t - \varphi) = H\cos(\omega t)\cos\varphi + H\sin(\omega t)\sin\varphi \, ,$$

так что $A = H\cos\varphi$, $B = H\sin\varphi$. Обратный перевод:

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = \sqrt{A^2+B^2} \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\omega t) \right) \, ,$$

откуда $H = \sqrt{A^2+B^2}$, $\cos\varphi = A/\sqrt{A^2+B^2}$, $\sin\varphi = B/\sqrt{A^2+B^2}$. Поскольку квадраты полученных $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ в сумме дают 1, такой угол φ действительно существует. Короче, $\mathrm{tg}\varphi = B/A$.

Если вспомнить пример 2 из п. 1.4 (стр. 22), видно, что вращение по окружности можно представить, как два колебания $x = R\cos(\omega t)$, $y = R\sin(\omega t)$. Так как центростремительное ускорение пропорционально радиус-вектору и направлено противоположно, для x и y получится уравнение колебаний – составляющая возвращающей силы пропорциональна смещению. Если сразу не догадаться до решения уравнения колебаний, можно было использовать эти соображения.

7.2 Уравнение энергии для колебаний. Затухание

Для массы на пружине закон сохранения энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E = \text{ const } . \tag{7.3}$$

Аналогично для физического маятника

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgL\varphi^2}{2} = E = \text{ const } .$$

(Потенциальная энергия – упрощенное выражение $mgL(1-\cos\varphi)$ для малых углов). Вообще, иногда удобнее писать вместо уравнения колебаний $\mu\ddot{x} = -\xi x$ уравнение энергии:

$$\frac{\mu\dot{x}^2}{2} + \frac{\xi x^2}{2} = E . \tag{7.4}$$

Из него также сразу находится частота: $\omega^2 = \xi/\mu$.
Пример: Бусинка скользит по проволоке, изогнутой в виде синусоиды $y = -Y\cos(kx)$. При малых x потенциальная энергия $U = mgy = -mgY + mgYk^2x^2/2$, кинетическая $m\dot{x}^2/2$. Первое слагаемое в потенциальной энергии постоянно и несущественно, так что $m\dot{x}^2/2 + mgYk^2x^2/2 = E$ и частота $\omega = \sqrt{gkY}$.

Некоторых смущает, что E неизвестна. Она и не нужна для нахождения частоты. Для **гармонических** колебаний, то есть для таких, которые описываются линейным уравнением движения (7.1,7.2) или законом сохранения энергии типа (7.3,7.4), частота ω **не зависит** от энергии (то есть амплитуды). На этом и основано применение маятника и других колебательных систем в часах.

Средняя кинетическая энергия $\langle m\dot{x}^2/2\rangle = m\omega^2A^2\langle\sin^2(\omega t)\rangle/2$, потенциальная $\langle kx^2/2\rangle = kA^2\langle\cos^2(\omega t)\rangle/2$. Ясно, что $\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \langle\cos^2(\omega t)\rangle = 1/2$. Поэтому средние кинетическая и потенциальная энергия при гармонических колебаниях равны (и обе равны $E/2$).

Колебания тела на пружине постепенно затухают. Почему это происходит? В уравнении колебаний учтем силу трения:

$$m\ddot{x} = -kx = b\dot{x} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 .$$

b называется коэффициентом (вязкого) трения, $\gamma = b/2m$ – коэффициентом затухания. Конечно, бывают и другие законы трения, но пока ограничимся этим.

Пусть трение мало, так что колебания затухают медленно. Энергия будет медленно уменьшаться (переходить в тепло):

$$\Delta E = -\int b\dot{x}dx = -\int bv\frac{dx}{dt}dt = -b\int v^2dt = -\frac{2b}{m}\int\frac{mv^2}{2}dt .$$

При малом трении можно взять много периодов колебаний, в каждом из которых кинетическая энергия колеблется вокруг половины полной энергии E, так что $\int (mv^2/2)dt \approx \langle mv^2/2\rangle \int dt = (E/2)\Delta t$. Тогда

$$\frac{\Delta E}{E} = -2\gamma\Delta t\ , \quad \text{или} \quad \frac{dE}{E} = -2\gamma dt\ , \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{E}{E_0}\right) = -2\gamma t\ , \quad E = E_0 e^{-2\gamma t}\ .$$

Энергия колебаний затухает экспоненциально. Амплитуды скорости и смещения пропорциональны $\sqrt{E}$, так что

$$V_{max} = V_0 e^{-\gamma t}\ , \quad x_{max} = x_0 e^{-\gamma t}\ .$$

Мы нашли, как изменяется амплитуда скорости. Теперь можно угадать решение уравнения колебаний с трением. Попробуем попросту колебание с убывающей амплитудой:

$$x = A\sin(\Omega t)e^{-kt}\ ,$$

где Ω и k надо определить так, чтобы это решение удовлетворяло уравнению. Вычисляем производные:

$$\begin{aligned} \dot{x} = &\quad A\Omega\cos(\Omega t)e^{-kt} - Ak\sin(\Omega t)e^{-kt}\ , \\ \ddot{x} = &\quad -A\Omega^2\sin(\Omega t)e^{-kt} - 2A\Omega k\cos(\Omega t)e^{-kt} + Ak^2\sin(\Omega t)e^{-kt}\ . \end{aligned}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} -A\Omega^2\sin(\Omega t)e^{-kt} - 2A\Omega k\cos(\Omega t)e^{-kt} + Ak^2\sin(\Omega t)e^{-kt}& \\ +2\gamma(A\Omega\cos(\Omega t)e^{-kt} - Ak\sin(\Omega t)e^{-kt})& \\ +\omega^2 A\sin(\Omega t)e^{-kt}& = 0 \end{aligned}$$

Сокращаем на A и на e^{-kt}:

$$(-\Omega^2 + k^2 - 2\gamma k + \omega^2)\sin(\Omega t) + (-2\Omega k + 2\gamma\Omega)\cos(\Omega t) = 0\ .$$

Должны зануляться скобки при $\sin$ и $\cos$ отдельно, иначе выйдет не нуль, а функция времени. Отсюда $k = \gamma, \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, и полное решение:

$$x = A\sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\cdot t)e^{-\gamma t}\ .$$

За время $\tau = 1/\gamma$, называемое **временем жизни колебаний**, амплитуда уменьшается в e раз (до 36%). Такое решение будет при резком толчке ($x(0) = 0$, рис. 7.3).

Если трение велико, $\gamma > \omega$, получается мнимое Ω (корень из отрицательного числа). Физически можно ожидать исчезновения колебаний (представим себе маятник в киселе). Попробуем просто $x = Ae^{-kt}$:

$$(k^2 - 2k\gamma + \omega^2)Ae^{-kt} = 0\ .$$

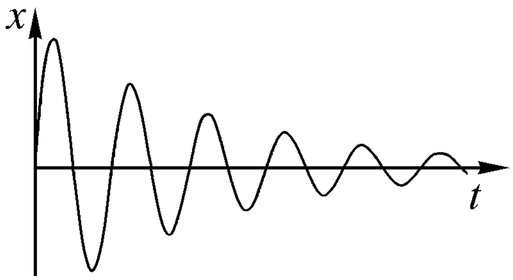

Рис. 7.3.

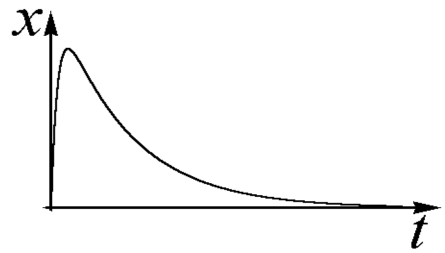

Рис. 7.4.

Находим $k = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$. Имеется, значит, два решения:

$$x = Ae^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t} \text{ и } x = Be^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t} .$$

Поскольку уравнение линейное, сумма решений тоже будет решением. Для начального условия $x(0) = 0$ можно написать

$$x = A\left(\frac{e^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t} - e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t}}{2}\right) e^{-\gamma t} = A\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t\right) e^{-\gamma t} .$$

с произвольной амплитудой A (рис. 7.4). Функция $\mathrm{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ называется гиперболическим синусом. Заметим, что из известной формулы Эйлера $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ получается $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ и решение при $\gamma > \omega$ формально следует из колебательного.

7.3 Вынужденные колебания. Резонанс

Свободные колебания затухают. Чтобы колебания продолжались неопределенное время, нужна вынуждающая сила. Особый интерес представляет сила, тоже имеющая колебательный характер. Сначала пусть затухания нет:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t) .$$

Решение естественно попробовать в виде $x = A\cos(\Omega t)$ – с частотой вынуждающей силы. Подставляем:

$$(-\Omega^2 + \omega^2)A\cos(\Omega t) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

и амплитуда $A = \dfrac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)}$. Зависимость $A(\Omega)$ показана на рис. 7.5 (сплошная кривая, состоящая из двух ветвей). Если вынуждающая частота меньше собственной ω, направление смещения и вынуждающей силы совпадают. Если же $\Omega > \omega$, то x изменяется в противофазе с F. Но ведь из состояния покоя тело должно двинуться в направлении F!

Этот парадокс решается учетом начальных условий. К полученному решению, совсем не зависящему от этих условий, можно добавить произвольное решение, описывающее свободные колебания (с частотой ω). Эту-то добавку и надо подобрать, чтобы начальные условия выполнились. Реально есть малое затухание, и собственные колебания через несколько времен жизни затухнут. К сожалению, это рассуждение не демонстрирует наглядно смены направления колебаний при увеличении частоты вынуждающей силы, а скорее разрешает такую возможность. Зато легко убедиться в такой смене знака экспериментально, раскачивая маятник за точку подвеса быстро либо медленно.

Как правило, нас не интересует знак амплитуды колебаний. На рис. 7.5 пунктиром показана абсолютная величина амплитуды при $\Omega > \omega$. Вместе с «законным» участком ($\Omega < \omega$) график содержит пик бесконечной высоты. Видим, что при частоте, близкой к собственной частоте системы, амплитуда колебаний очень велика. Это явление называется **резонансом**. Малая сила способна в резонансе раскачать любую систему. Можно, например, поднять груз любого веса, подвесив его на веревке и действуя в такт собственным колебаниям.

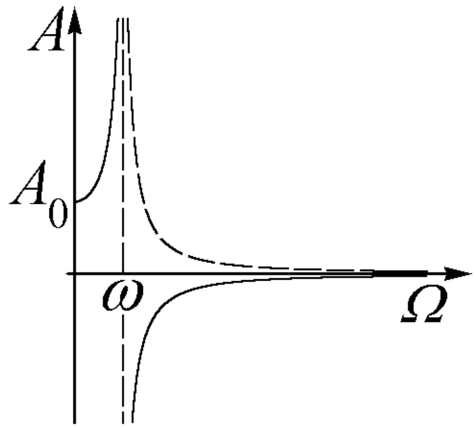

Рис. 7.5.

Теперь учтем затухание:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)\ .$$

Если бы слагаемое $2\gamma\dot{x}$ доминировало, координата была бы $\sim \sin(\Omega t)$, то есть сдвинулась на $\pi/2$ по фазе. Если затухание не столь велико, наверно, и сдвиг будет меньше: $x = A\cos(\Omega t - \varphi)$. Подставляем, используя секретное преобразование $\cos(\Omega t) = \cos(\Omega t - \varphi + \varphi)$:

$$\begin{array}{rcl} A(-\Omega^2 + \omega^2)\cos(\Omega t - \varphi) & - & A2\gamma\Omega\sin(\Omega t - \varphi) = \\ \dfrac{F_0}{m}\cos\varphi\cos(\Omega t - \varphi) & - & \dfrac{F_0}{m}\sin\varphi\sin(\Omega t - \varphi) \end{array}$$

Опять отдельно надо уравновесить $\cos(\Omega t - \varphi)$ и $\sin(\Omega t - \varphi)$:

$$A(-\Omega^2 + \omega^2) = \frac{F_0}{m}\cos\varphi\ , \quad 2A\gamma\Omega = \frac{F_0}{m}\sin\varphi\ .$$

Отсюда

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\ , \quad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}\ .$$

График $A(\Omega)$ называется **резонансной кривой** (рис. 7.6). При малом γ – самый интересный случай – второе слагаемое под корнем несущественно, если только ω и Ω не сравниваются. Зато при резонансе именно трение ограничивает амплитуду;

при $\Omega = \omega$ $A = F_0/2m\gamma\omega$ (резонансный пик при учете трения имеет конечную высоту). Ширина пика $\Delta\Omega$ определяется обычно из условия, что слагаемые под корнем одинаковы (уровень $0.707 = 1/\sqrt{2}$):

$$\omega^2 - \Omega^2 \approx 2\Omega\Delta\Omega = 2\gamma\Omega\ , \quad \Delta\Omega = \gamma\ .$$

В этой же резонансной области резко меняется фазовый сдвиг. Когда Ω заметно меньше собственной частоты (на несколько γ), то $\varphi \ll 1$, при точном резонансе $\varphi = \pi/2$, а при $\Omega > \omega$ быстро приближается к π. Таким образом, трение следует учитывать только вблизи резонанса. Вдали же колебания будут либо в фазе, либо в противофазе с вынуждающей силой, как мы уже отмечали. Амплитуда тоже перестает зависеть от γ: сравните рис. 7.6 и рис. 7.5 для модуля $|A|$. Затухание попросту ограничивает бесконечный пик рис. 7.5.

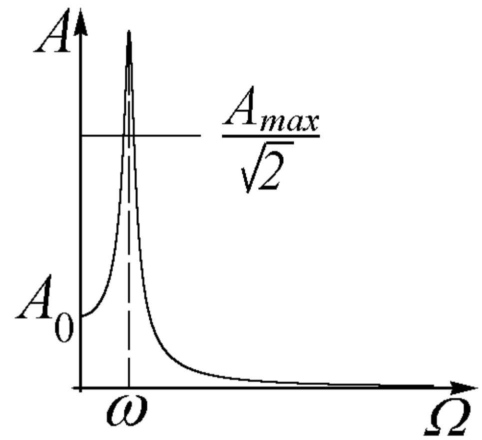

Рис. 7.6.

Резонанс бывает как полезен (музыкальные инструменты, радиосвязь), так и нежелателен (строения во время землетрясения).

7.4 Неустойчивость

Колебания, как мы видели, происходят вокруг положения устойчивого равновесия. Но бывают равновесия и неустойчивые, из которых система выходит самопроизвольно. Что можно сказать о движении при такой ситуации?

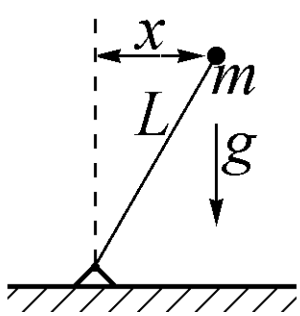

Рис. 7.7.

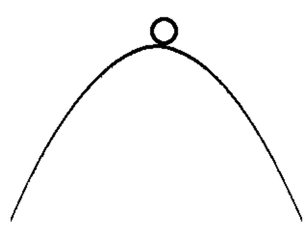

Рис. 7.8.

Простейший пример неустойчивости – маятник вверх головой (рис. 7.7). Нить, конечно, не годится; масса m укреплена на стержне, который может вращаться вокруг нижней точки. Уравнение движения массы m при малом отклонении от вертикали:

$$m\ddot{x} = \frac{mg}{L}x \quad \text{или} \quad \ddot{x} = \frac{g}{L}x \equiv \gamma^2 x\ .$$

Уравнение похоже на уравнение колебаний, но знак в правой части другой – сила не возвращает, а уводит массу из положения равновесия. Можно использовать и энергетический подход. Например, пусть имеется тело на гладкой возвышенности, форма которой задается уравнением $y = -(k/mg)\cdot(x^2/2)$ (рис. 7.8). Форма коэффициента выбрана так, чтобы потенциальная энергия выражалась попроще: $U = mgy = -kx^2/2$. Здесь k имеет размерность коэффициента упругости и описывает кривизну горы в верхней точке. Для перевернутого маятника при малом отклонении x смещение по вертикали $y = x^2/(2L)$, и эквивалентное значение $k = mg/L$. Тогда при малых отклонениях

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = E = \text{ const } .$$

Опять, за исключением знака, похоже на уравнение энергии для колебаний, но пружина как будто имеет отрицательную жесткость.

Похоже, что два колебательных решения – $\sin$ и $\cos$ – не подойдут. Из небогатого набора известных нам функций нетрудно извлечь такую, у которой производная пропорциональна самой функции. Это, конечно, экспонента. Пробуем $x = Ae^{bt}$, где b пока неизвестно. Подставляем в уравнение:

$$b^2 Ae^{bt} = \gamma^2 Ae^{bt} ,$$

откуда $b = \pm\gamma$. Амплитуда A сократилась и, значит, может быть любая – можно терять равновесие быстрее или медленнее. Коэффициент γ размерности 1/с (как и у частоты колебаний ω), называется **инкрементом** неустойчивости.

Как и для колебаний, есть два решения: $Be^{-\gamma t}$ и $Ae^{\gamma t}$. Это оттого, что уравнение второго порядка (входит вторая производная). Постоянные B и A находятся из начальных условий. В отличие от случая колебаний, эти два решения совсем непохожи: одно растет со временем, другое убывает. Практически невероятно, чтобы при ненулевых начальных условиях получилось $A = 0$. Поэтому неустойчивость, в общем, возрастает со временем.

Это возрастание быстрое. Через характерное время $\tau = 1/\gamma$ начальная амплитуда возрастет в $e = 2{,}71828\ldots$ раз, через 2τ в $e^2 \approx 7{,}3$ раза, через 3τ – примерно в 20 раз, и т.д. Пусть мы хотим поставить карандаш на острый конец. Для него время $\tau \sim \sqrt{L/g} \cong 0{,}1$ с. Если ставить очень аккуратно, можно выдержать вертикаль с точностью до 0,05 мм. Такого порядка будет амплитуда A – при $B = 0$ это попросту начальное отклонение. Будем считать, что карандаш упал, если отклонение верхнего конца достигло 5 см, то есть возросло в 1000 раз. Тогда $e^{t/\tau} = 10^3$, $t = \tau \cdot 3\ln(10) = \tau \cdot 3 \cdot 2{,}3 = 7\tau$. Теперь с помощью различных дорогих приборов установим карандаш еще точнее – в 10 раз. Время падения увеличится всего на $2{,}3\tau$. Даже если можно добиться точности порядка атомных размеров – $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ см, что вообще-то сомнительно, получится всего $\tau \cdot 9\ln(10) \approx 20\tau$. Значит, карандаш никогда в жизни не продержится дольше двух секунд. При этом его вовсе не надо кому-то толкать; он прекрасно упадет сам. А если его выставить «идеально», то его выведет из равновесия любое дуновение воздуха.

В общем можно сказать, что время развития неустойчивости всегда порядка **нескольких** характерных времен $\tau = 1/\gamma$. Экспоненциальный рост очень быстрый, и для достижения заданного уровня отклонения от равновесия нужно время, почти не зависящее от этого уровня.

Рост населения Земли – тоже своеобразная неустойчивость. Если оно удваивается, скажем, за 25 лет, то за 50 учетверится, а за 100 – возрастет в 16 раз. Время удвоения для уравнения, описывающего неустойчивость, равно $\ln 2/\gamma \approx 0{,}7/\gamma$. В действительности в настоящее время рост населения Земли происходит еще быстрее. Это можно объяснить тем, что со временем возрастает доля быстро размножающихся групп. В результате коэффициент γ растет со временем. Каждое последующее удвоение требует меньше времени.

Экспоненциально развивающийся процесс вскоре приобретает характер взрыва. Это иллюстрируется известной индийской легендой об изобретателе шахмат. Мудрец в качестве награды попросил положить на одну клетку доски зерно, на вторую – два, на третью – четыре, и т.д. Всего понадобится $2^{64} - 1 \approx 10^{19}$ зерен, или порядка $3 \cdot 10^{11}$ тонн. Даже сейчас на Земле годовой сбор зерна меньше примерно в 300 раз.

То же самое получим, найдя время достижения данного уровня:

$$t = \tau \cdot \ln(x/x_0)\ .$$

При большом отношении x/x_0 время почти не зависит от этого отношения. Например, при $x/x_0 = 10^6$ получим $\approx 14\tau$, а при росте аргумента еще в 100 раз будет $\approx 18{,}4\tau$ – всего на 30% больше. Логарифм и должен меняться слабо, как обратная функция к быстро меняющейся экспоненте. У физиков даже есть поговорка: «Логарифм – это не функция». Часто появляются логарифмические расходимости, но их никто уже не пугается, так как всегда можно ограничить аргумент, причем не очень важно, на каком уровне: достаточно оценки. Возвращаясь к экологии, отметим, что при экспоненциальном росте экономики (на α процентов в год: $e^{0{,}01\alpha t}$) время исчерпания природных ресурсов равно нескольким характерным временам $100/\alpha$ **независимо** от количества этих ресурсов.

Разумеется, никакая неустойчивость не может развиваться экспоненциально долгое время. Например, падающий карандаш не может иметь ускорение больше g. При не малом угле наклона линейное уравнение перестанет выполняться. Всякая неустойчивость в свое время переходит в нелинейную стадию. Обычно при этом экспоненциальный рост сменяется более медленным степенным, хотя бывают обратные примеры – самоускоряющиеся процессы типа теплового взрыва или гравитационного коллапса.

Сходство уравнения неустойчивости с уравнением колебаний заслуживает отдельного обсуждения. Мы можем заменить γ^2 на $-(i\gamma)^2$, где i – это мнимая единица. Тогда получается уравнение, по форме колебательное

$$\ddot{x} = -(i\gamma)^2 x\,,$$

но с мнимой частотой $\omega = i\gamma$. Формально можно использовать «колебательные» решения типа $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$. Поскольку, например, $\cos(\omega t) = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$, то при мнимой частоте как раз получатся действительные экспоненты. Обратно, колебания можно рассматривать как «неустойчивость» с мнимым инкрементом. В общем случае уравнение может содержать «частоту», имеющую как действительную, так и мнимую часть, как было для затухающих колебаний. Действительная обеспечивает колебания, мнимая в зависимости от знака – затухание или рост неустойчивости.

Приложение 1. Модель трения

Для лучшего понимания затухающих колебаний полезна очень простая механическая модель слабого трения. Пусть масса на пружинке, проходя положение равновесия, где скорость V максимальна, всякий раз упруго ударяет малый грузик Δm. Грузик отлетает с удвоенной скоростью $2V$ и уносит часть импульса: $\Delta p = 2V\Delta m$; средняя сила за период $F \approx 2V\Delta m/T$ как раз пропорциональна V, причем $b = 2\Delta m/T$.

Скорость тела после первого удара $V_1 = V_0 - 2V_0\Delta m/m = V_0(1 - 2\Delta m/m)$. После второго будет $V_2 = V_1(1 - 2\Delta m/m) = V_0(1 - 2\Delta m/m)^2$, а после n ударов (периодов) $V_n = V_0(1 - 2\Delta m/m)^n$. Мы уже знаем, как возводить число, близкое к 1 ($\Delta m \ll m$) в большую степень. Бином Ньютона здесь не годится, так как при $n > 2m/\Delta m$ получится отрицательное число. Перепишем выражение в виде

$$V_n = V_0 \left[\left(1 - \frac{2\Delta m}{m} \right)^{-m/2\Delta m} \right]^{-(2\Delta m/m)\cdot n} .$$

В квадратной скобке получается число e (замечательный предел). Поэтому $V_n = V_0 \exp(-2\Delta m n/m)$ или, если выразить Δm и $n = t/T$,

$$V(t) = V_0 \exp\left(-\frac{bt}{m} \right) .$$

Показатель из-за грубости модели здесь вдвое больше, чем мы получили, усредняя потери энергии, но зависимость аналогичная.

Приложение 2. Ангармонические колебания

С увеличением амплитуды колебаний возникают новые явления. Рассмотрим два заряда q, причем нижний закреплен, а верхний может двигаться по вертикали (рис. 7.9). На верхний действует сила[1] $F = -mg + q^2/x^2$. Имеется положение равновесия $x_0 = q/\sqrt{mg}$. Запишем

[1] В системе СИ сила взаимодействия зарядов содержит еще коэффициент $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, который мы опускаем для краткости и во избежание путаницы с коэффициентом упругости.

силу вблизи положения равновесия – при $x = x_0 + y$, причем y мало:

$$F = -mg + \frac{q^2}{(x_0+y)^2} = -mg + \frac{q^2}{x_0^2}\left(1 + \frac{y}{x_0}\right)^{-2} \approx -mg + \frac{q^2}{x_0^2} - 2\frac{q^2}{x_0^3} \cdot y \; .$$

Первые два слагаемых автоматически уничтожатся – это сила в положении равновесия, разумеется, нулевая. Получаем уравнение движения:

$$m\ddot{y} = -2\frac{q^2}{x_0^3} \cdot y \; ,$$

то есть уравнение колебаний с частотой $\omega^2 = q^2/(mx_0^3)$.

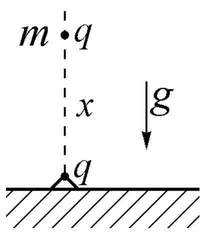

Рис. 7.9.

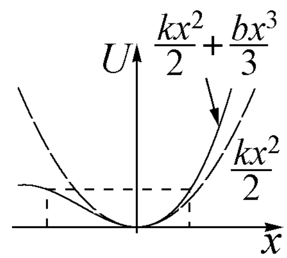

Рис. 7.10.

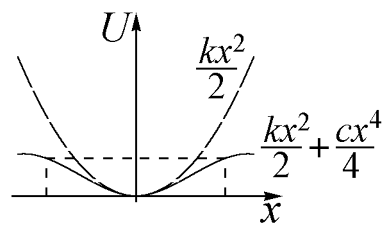

Рис. 7.11.

Вообще, если в точке x_0 функция $F(x)$ обращается в нуль, то вблизи этой точки $F \approx (x - x_0) \cdot (dF/dx)|_{x_0}$. Но это – только первое приближение. Известно, что достаточно хорошие функции разлагаются в **ряд Тейлора**:

$$F(x) = F(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1} \cdot \frac{dF}{dx}\bigg|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2F}{dx^2}\bigg|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3F}{dx^3}\bigg|_{x_0} + \ldots$$

Значит, следующие приближения для силы содержат слагаемые $\sim (x - x_0)^2$, за ними $(x - x_0)^3$, и т. д. Соответственно потенциальная энергия будет содержать поправки $\sim (x - x_0)^3$ и $(x - x_0)^4$.

Сначала выясним (качественно), что дает первая поправка. Уравнение движения запишем, отмеряя x от равновесия:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + bx^2 = 0 \; .$$

Потенциальная яма становится несимметричной, $U \sim \omega^2 x^2/2 + bx^3/3$ (рис. 7.10). Из-за этого перекоса появляется ненулевое среднее значение x. Усредняем уравнение, считая, что координата – сумма постоянной величины и синусоиды: $x = \delta + A\cos(\omega t)$. Получаем

$$\omega^2\delta + b\frac{A^2}{2} = 0 \; , \quad \text{и смещение} \quad \delta = -b\frac{A^2}{2\omega^2} \; .$$

Такая ситуация будет для наших зарядов при учете поправок к силе. При заметной амплитуде заряд в среднем будет болтаться выше. С этой же поправкой связано явление теплового расширения. При тепловых колебаниях каждый атом смещается. Сумма всех смещений дает расширение образца, пропорциональное длине и квадрату амплитуды колебаний, то есть энергии (температуре). При гармонических колебаниях всего-навсего шевелились бы бока образца на одну амплитуду A, которая никак не больше межатомного расстояния, т.е. эффект был бы незаметен.

Рассмотрим следующую поправку, которая важна в симметричных потенциальных ямах. Например, для маятника возвращающий момент $M \sim \sin\varphi \approx \varphi - \varphi^3/6$, потенциальная энергия $U \sim (1-\cos\varphi) \approx \varphi^2/2 - \varphi^4/24$ (рис. 7.11). Соответствующий коэффициент упругости вроде как умножается на $(1-\varphi^2/6)$, если выбрать первое выражение. Среднее значение этого множителя будет $(1-\varphi_0^2/12)$. Частота пропорциональна корню из упругости, $\omega = \omega_0(1-\varphi_0^2/24)$. Период $T = T_0(1+\varphi_0^2/24)$. Это, конечно, оценка. Точная поправка: $T = T_0(1+\varphi_0^2/16)$ [2].

Период секундного маятника с амплитудой $6^\circ \approx 0{,}1$ изменится на $0{,}01/16 = 6 \cdot 10^{-4}$, за сутки ошибка будет ≈ 50 с. Конечно, можно эту ошибку скомпенсировать длиной нити, но она зависит от амплитуды. Кроме того, на точность хода влияет тепловое расширение (длина маятника) и изменения g при движении часов.

С развитием мореплавания появилась проблема «перевозки времени». Часы с точностью 10^{-5} уходят на 1 с в сутки, за 3 месяца – на 90 с = 1,5 мин. При астрономическом определении места будет ошибка в $360 \cdot 1{,}5/(60 \cdot 24) = 3/8$ градуса широты, или $40000 \cdot 1{,}5/(60 \cdot 24) \approx 40$ км. Как раз можно налететь на какие-нибудь скалы, думая, что до них еще далеко. Маятниковые часы в плавании не годятся; применялись хронометры с крутильным маятником, нечувствительные к ускорениям. Тепловое расширение, в принципе, компенсируется. Теперь такой проблемы нет, любые часы можно проверить по радиосигналам.

Интересна задача о **брахистохроне** – кривой, по которой в поле тяжести колебания происходят с точно постоянным периодом, независимо от амплитуды. Тогда в уравнении колебаний или энергии не должно быть никаких поправок. Эта кривая – не парабола. Хотя на параболе потенциальная энергия $U \sim x^2$, но кинетическая не точно пропорциональна $\dot{x}^2$, так как есть еще вертикальная скорость. На этой задаче Д. Бернулли продемонстрировал пользу методов Ньютона.

Для кривой $y = y(x)$ потенциальная энергия $U = mgy$. Введем длину вдоль кривой s, тогда кинетическая энергия $m\dot{s}^2/2$ точно. Требуется, чтобы выполнялась пропорциональность $y \sim s^2$. Поскольку окружность и парабола не годятся, попробуем циклоиду. В параметрической форме

$$
\begin{aligned}
y &= R(1-\cos\varphi) \qquad \text{(одновременно это } 2R\sin^2(\varphi/2))\\
x &= R(\varphi + \sin\varphi) \quad .
\end{aligned}
$$

Нижняя точка $\varphi = 0$; $dx = R(1+\cos\varphi)d\varphi$, $dy = R\sin\varphi d\varphi$. Считаем элемент длины дуги:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R\sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi = 2R\cos(\varphi/2)d\varphi \ .$$

Длина $s = \int ds = \int 2R\cos(\varphi/2)d\varphi = 4R\sin(\varphi/2)$. Действительно, получается $y = s^2/(8R)$. Уравнение энергии

$$\frac{m\dot{s}^2}{2} + \frac{mgs^2}{8R} = E$$

[2] Вроде не видно, где мы ошиблись. На самом деле не только меняется частота, но и к основному колебанию в том же приближении добавляются еще более быстрые, с частотой, в данном случае, 3ω. Поэтому неточность не удивительна.

точное при $|s| < 4R$. Частота колебаний $\omega = \sqrt{g/4R}$, период $T = 4\pi\sqrt{R/g}$, время соскальзывания в нижнюю точку $T/2 = 2\pi\sqrt{R/g}$ **с любой высоты**. Такую кривую опишет груз на невесомом обруче, «катающемся» по потолку (рис. 7.12).

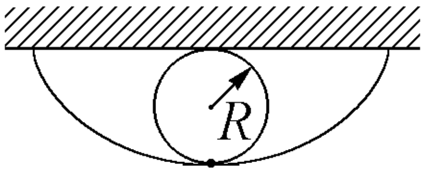

Рис. 7.12.

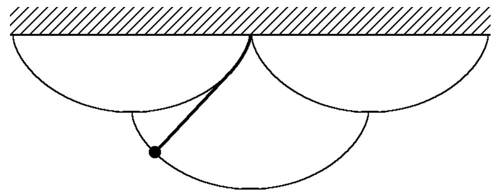

Рис. 7.13.

Первым маятниковые часы построил Х. Гюйгенс (1629–1695) около 1657 г. Он же открыл замечательное свойство изохронности циклоидального маятника и предложил конструкцию, в которой эта идея осуществляется (рис. 7.13). Между двумя «бревнами», сечения которых обработаны в форме циклоид высоты $2R$, помещается точка подвеса маятника, длина нити которого равна $4R$. Оказывается (попробуйте доказать самостоятельно), что при этом колеблющийся груз движется по циклоиде точно такой же формы! Следовательно, период колебаний такого маятника в точности один и тот же при любой (а не только малой) амплитуде[3].

[3]На практике циклоидальный маятник не нашел широкого применения. Другие пути повышения точности часов оказались более удобными.